1 Teorema do Confronto

O seguinte resultado é uma importante ferramenta para analisar certos limites.

Teorema 1 (Confronto) *Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções definidas num intervalo I $(a \in I)$ exceto, possivelmente em a. Suponhamos que*

$$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

para x em $I \setminus \{a\}$ e que

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Este resultado não é difícil de ser aceito após visualizar uma figura padrão que o representa.

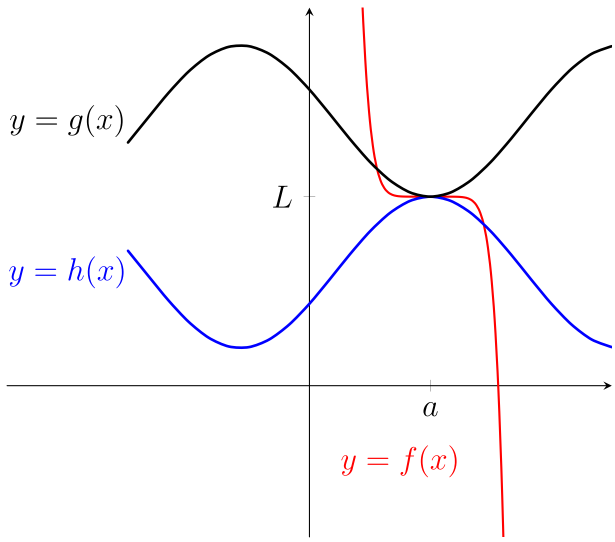

Figura 1: Teorema do Confronto

Faremos duas aplicações deste teorema. A primeira é o que chamaremos de teorema do anulamento, que enunciaremos na Seção 2.3, e a segunda é o cálculo do limite trigonométrico fundamental, que faremos na Seção 2.1.

2 Três Limites Importantes

Nesta seção, vamos discutir um pouco o que foi visto no vídeo **Três limites importantes**, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=v7n_mWclSRA.

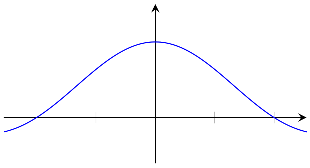

Figura 2: $h(x) = \text{sen}(x)/x$

Vemos o gráfico de três exemplos importantes envolvendo um denominador que tende a zero. Observe que nos três exemplos aparece um 0 em algum denominador. Cada um desses exemplos ilustra uma situação diferente.

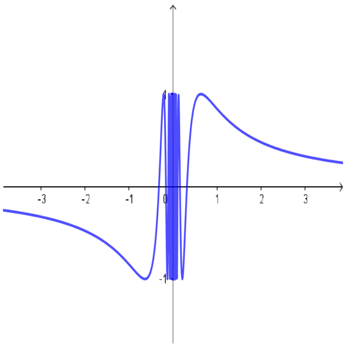

Figura 3: $f(x) = \text{sen}(1/x)$.

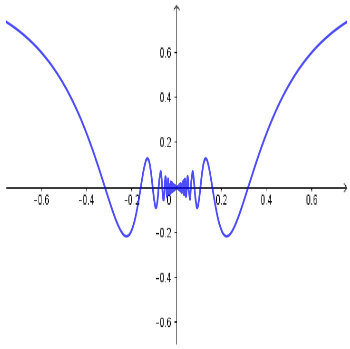

Figura 4: $g(x) = x\text{sen}(1/x)$

2.1 O Limite Trigonométrico Fundamental $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$

Nosso primeiro foco é analisar esse limite. Quando x tende a 0, tanto x como $\text{sen}(x)$ tendem a 0 e não há, aqui, um modo simples de tentar simplificar essa fração. A tentativa será proceder analisando gráficos. Olhando a Figura 2 podemos imaginar que o limite deve ser 1, o que significaria que, muito perto de 0, o comprimento de um arco (x) e o valor do seu seno estão muito próximos, é razoável, então, tentar comparar os gráficos de $f(x) = x$ e $f(x) = \text{sen}(x)$.

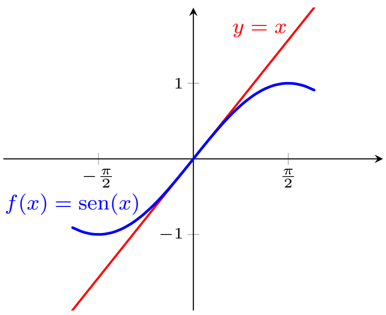

Figura 5: Comparando $\text{sen}(x)$ com x

O gráfico de $y = x$ está em vermelho e o do seno em azul. Não é difícil ver que os valores, perto da origem, são tão próximos que mal se distingue um gráfico do outro.

Uma outra tentativa, ainda no campo de uma análise gráfica, é olhar para o círculo trigonométrico.

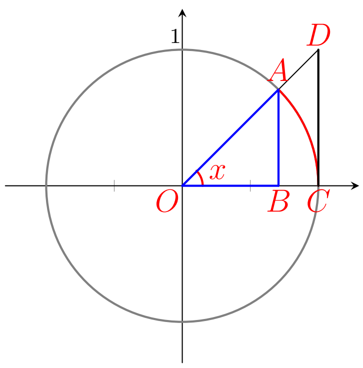

Figura 6

Considere:

- R_1 o triângulo retângulo de vértices O, B e A;
- R_2 o setor circular de vértices O, C e A;
- R_3 o triângulo retângulo de vértices O, C e D;

Olhando na figura acima vemos que vale a seguinte desigualdade de áreas.

$$\text{Área}(R_1) \leqslant \text{Área}(R_2) \leqslant \text{Área}(R_3).$$

Para calcular estas áreas observamos os seguintes comprimentos das semirretas.

$$|\overrightarrow{OB}| = \cos(x), |\overrightarrow{BA}| = \text{sen}(x), |\overrightarrow{OC}| = 1 = |\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{CD}| = \tan(x).$$

Desta forma, temos as seguintes desigualdades oriundas das desigualdades de áreas.

$$\frac{\cos(x)\text{sen}(x)}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan(x)}{2}.$$

Como estamos considerando $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ temos que $\text{sen}(x) > 0$ e podemos multiplicar as desigualdades acima por $\frac{2}{\text{sen}(x)}$ para obter

$$\cos(x) \leqslant \frac{x}{\text{sen}(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}.$$

Invertendo as frações envolvidas nas desigualdades obtemos

$$\cos(x) \leqslant \frac{\text{sen}(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$ temos, pelo Teorema do Confronto, que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

De forma análoga, podemos considerar $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ e fazer uma análise similar de áreas para obter $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$. Portanto, concluímos que vale o **Limite Trigonométrico Fundamental**:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Exemplo 2.1 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{1}{\cos(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \cancelto{1}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} \cdot \lim_{x\to 0} \cancelto{1}{\frac{1}{\cos(x)}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exemplo 2.2 $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$

Aqui, podemos usar o recurso de ***mudar a variável****. Vamos escolher uma nova variável* u *e relacioná-la com* x *pela expressão* $u = 2x$*. Então, quando* x *tende a* 0*,* u *também tende a* 0 *e reescrevemos o problema em função de* u *como:*

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{\frac{u}{2}} = \lim_{u\to 0} 2.\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 2$$

2.2 O limite $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Um segundo exemplo importante é a função cujo gráfico está na Figura 3.

O gráfico mostra uma oscilação grande em torno de 0 enquanto a imagem da função fica limitada entre -1 e 1, como era de se esperar para um seno. Vamos escolher um intervalo $(-a, a)$ qualquer em torno de 0.

Notamos que, mesmo que a seja bem pequeno, é possível escolher algum valor de n com $1/n < a$. Em especial, $1/(n\pi) < a$. Ao avaliar a função nesse valor de x teremos $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$. Portanto em qualquer intervalo em torno de 0, existem valores de x, tais que $f(x) = 0$.

Por outro lado, se escolhermos n tal que $x = \frac{1}{\pi(1+4n)} < a$, teremos $1/x = \pi/2 + 2n\pi$ e quando calcularmos $f(x)$ o resultado será 1. Então, quando nos aproximamos de 0, sempre haverá pontos com $f(x) = 0$ e pontos com $f(x) = 1$. Conclusão: não existem os limites laterais no 0, portanto o limite $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe!

2.3 O limite $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

O interesse maior nesse caso, como mostrado no vídeo, é que temos uma função limitada, que não possui nenhum dos limites laterais no 0, multiplicada por uma outra ($g(x) = x$) que está tendendo a zero. Nesse caso, o limite do produto existe e é zero! Esse fato é consequência do seguinte resultado:

Teorema 2 ***(Anulamento)*** *Seja* $g(x)$ *uma função limitada em algum intervalo em torno de* a*, exceto, possivelmente, no próprio* a*, ou seja,* $|g(x)| \leq M, \forall x \in (a - r, a) \cup (a, a + r)$*,para algum* $r > 0$*. Se* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$*, então* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$*.*

O **Teorema do Anulamento** nos diz que se tomarmos uma função limitada e fizermos o produto por uma função que tende a 0, então esse produto tem limite 0. No caso das funções seno e cosseno, elas são limitadas em toda a reta, ou seja $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ e $|\cos(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3 $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) \cos(1/x^2)$
Nesse caso, temos

$$\operatorname{sen}(x) \to 0, \textit{ quando } x \to 0 \textit{ e } |\cos(1/x^2)| \leq 1, \forall x \neq 0.$$

Portanto, pelo Teorema do Anulamento, segue que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) \cos(1/x^2) = 0$. *Note que a função* $y = \cos(1/x^2)$ *não possui limite em* $x = 0$, *já que a medida em que nos aproximamos de* 0, $1/x^2$ *cresce de maneira ilimitada, fazendo o cosseno oscilar entre -1 e 1, indefinidamente.*

3 Exemplos de cálculo de alguns limites

Observe que em todos os exemplos abaixo temos uma indeterminação do tipo [0/0].

Exemplo 3.1 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - 9}$

Note que quando $x \to 3$, *numerador e denominador tendem a* 0, *o que nos leva a uma indeterminação (não sabemos o que acontece com o limite com a função escrita nessa forma!). Por serem polinômios, o limite será o valor que essas funções assumem no ponto* $x = 3$ *e portanto podemos fatorá-las, dividindo-as por* $x - 3$. *Assim, obtemos*

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 + 1)(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 + 1)\cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}(x + 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 1}{x + 3} = 10/6 = 5/3.$$

Exemplo 3.2 $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{|x^2 - 7x + 12|}{4 - x}$

Aqui também temos o numerador e o denominador tendendo a 0. *Neste caso,* $x^2 - 7x + 12 \to 0$ *e temos que* $x = 4$ *é raiz da função quadrática, que após divisão, segue que* $x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$. *Agora, vamos abrir o módulo, a fim de simplificarmos, para tal, precisamos lembrar do sinal de* $x^2 - 7x + 12$. *Mas, o gráfico dessa função quadrática é uma parábola com concavidade para cima e portanto entre suas raízes,* 3 *e* 4, *seu sinal é* *<u>negativo</u>*. *Assim,* $|x^2 - 7x + 12| = |(x - 4)(x - 3)| = -(x - 4)(x - 3) = (4 - x)(x - 3)$, *se* $x \in (3, 4)$. *Logo, como o limite é pela esquerda do* 4 *(consideramos valores menores do que* 4 *e próximos de* 4*), segue que*

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{|x^2 - 7x + 12|}{4 - x} = \lim_{x \to 4^-} \frac{\cancel{(4 - x)}(x - 3)}{\cancel{(4 - x)}} = \lim_{x \to 4^-} x - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Exemplo 3.3 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{|x^2 - 7x + 12|}{4 - x}$

Aqui, temos o limite total, em ambos os lados. A mesma situação do exemplo 3.2, mas com limite pela direita. Então, procedendo da mesma forma, vamos calcular o limite lateral à direita do 4. Primeiro, vamos abrir o módulo: $|x^2 - 7x + 12| = |(x - 4)(x - 3)| = (x - 4)(x - 3)$, *se* $x > 4$, *pois*

$x^2 - 7x + 12 > 0, \forall x > 4$. Logo, como o limite é pela direita do 4 (consideramos valores maiores do que 4 e próximos de 4), segue que

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{|x^2 - 7x + 12|}{4 - x} = \lim_{x \to 4^+} \frac{\cancel{(x-4)}(x-3)}{-\cancel{(x-4)}} = \lim_{x \to 4^+} 3 - x = 3 - 4 = -1.$$

Como os limites laterais no 4 são distintos, temos que não existe o $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{|x^2 - 7x + 12|}{4 - x}$.

Exemplo 3.4 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

Vamos usar aqui o produto notável $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ para eliminarmos a raiz quadrada e podermos simplificar, cancelando, desta forma a indeterminação. Vamos pensar que no numerador do limite temos $a - b$, então vamos multiplicar e dividir o quociente por $a + b$ (seu conjugado), ***o que não muda a função original****, só reescrevemos! Observe:*

$$\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} . \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2},$$

logo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 3.5 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

Vamos usar aqui outro produto notável $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ para eliminarmos a raiz cúbica e podermos simplificar, cancelando, desta forma a indeterminação. Vamos pensar que no numerador do limite temos $a - b$, então vamos reescrever a função, multiplicando e dividindo o quociente por $a^2 + ab + b^2$. Assim, temos

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} . \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1},$$

logo

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1}\right)^2 + \sqrt[3]{1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 3.6 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\operatorname{sen}(3x)}$

Quando temos inderteminação envolvendo funções trigonométricas, tentamos manipular a função, de tal forma, que o limite trigonométrico fundamental $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$ apareça na expressão. Assim, iniciamos multiplicando e dividindo a função por x e agrupando os fatores, temos

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x} \frac{x}{\operatorname{sen}(3x)}$$

Agora, vamos "ajeitar"o arco e o denominador de cada fator, então

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x} \frac{x}{\operatorname{sen}(3x)} = \lim_{x\to 0} \pi \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} \frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} \frac{1}{3} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{3} \overbrace{\cancel{\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}}}^{1} \frac{1}{\underbrace{\cancel{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}}_{\to 1}} = \frac{\pi}{3}.$$

No cálculo do limite utlilizamos duas substituições: $t = \pi x$ *e* $u = 3x$*, pois* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\text{sen}(t)}{t} = 1$ *e* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(3x)}{3x} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\text{sen}(u)}{u} = 1$.

Exemplo 3.7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$

Queremos que o limite trigonométrico fundamental $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\text{sen}(t)}{t} = 1$ *apareça na expressão. Assim, iniciamos multiplicando e dividindo a função por* $1+\cos(x)$ *(o conjugado de* $1-\cos(x)$*) . Desta forma, pela identidade trigonométrica fundamental* $(\text{sen}(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$*, segue que* $(\text{sen}(x))^2 = 1-(\cos(x))^2$ *e, portanto, temos*

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1-\cos(x)}{x}\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-(\cos(x))^2}{x(1+\cos(x))} = \frac{(\text{sen}(x))^2}{x(1+\cos(x))} = \frac{\text{sen}(x)}{x}\frac{\text{sen}(x)}{(1+\cos(x)},$$

logo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \cancelto{1}{\frac{\text{sen}(x)}{x}} \cancelto{0}{\frac{\text{sen}(x)}{(1+\cos(x)}} = 0.$$

Exemplo 3.8 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

Seguimos os mesmos passos do exemplo 3.7 e chegamos a

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-\cos(x)}{x^2}\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-(\cos(x))^2}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{(\text{sen}(x))^2}{x^2(1+\cos(x))} = \left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos(x)},$$

logo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \cancelto{1}{\left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^2} \cancelto{1/2}{\frac{1}{(1+\cos(x)}} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 3.9 $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\text{sen}(x)}{x-\pi}$

Aqui temos um limite deslocado da origem, então para usarmos o limite trigonométrico fundamental, primeiro fazemos uma mudança de variável $t = x-\pi$*. Assim,* $t\to 0$*, quando* $x\to\pi$ *e obtemos*

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\text{sen}(x)}{x-\pi} = \lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}(t+\pi)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-\text{sen}(t)}{t} = -1.$$

Observe que utilizamos acima a identidade do seno da soma ($\text{sen}(a+b) = \text{sen}a\,\cos b + \text{sen}b\,\cos a$*)*

Exemplo 3.10 $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{\text{sen}(x+2)}{|4-x^2|}$

Inicialmente, vamos abrir o módulo, então, como $4-x^2 < 0$*, para* $x < -2$*, segue que* $|4-x^2| = |(2-x)(2+x)| = -(2-x)(2+x)$*, quando* $x < -2$*. Logo, se* $x < -2$*, temos*

$$\frac{\text{sen}(x+2)}{|4-x^2|} = \frac{\text{sen}(x+2)}{-(2-x)(2+x)} = \frac{\text{sen}(x+2)}{(x+2)}\frac{1}{x-2},$$

logo

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{\text{sen}(x+2)}{|4-x^2|} = \lim_{x\to -2^-} \cancelto{1}{\frac{\text{sen}(x+2)}{(x+2)}} \cancelto{-1/4}{\frac{1}{x-2}} = -\frac{1}{4}.$$

Exemplo 3.11 $\lim_{x \to 0^+} \text{tg}(x)\text{sen}(e^{1/x})$

Observe que $\lim_{x \to 0^+} \text{tg}(x) = 0$, *mas a função* $y = \text{sen}(e^{1/x})$ *não possui limite quando* $x \to 0^+$, *pois* $1/x$ *cresce ilimitadamente e* $e^{1/x}$ *também, donde* $y = \text{sen}(e^{1/x})$ *oscila entre* -1 *e* 1 *indefinidamente. Porém,* $|\text{sen}(e^{1/x})| \leq 1$, $\forall x > 0$, *assim podemos aplicar o Teorema do Anulamento. Logo,* $\lim_{x \to 0^+} \text{tg}(x)\text{sen}(e^{1/x}) = 0$.

Exemplo 3.12 $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{|x|}\text{sen}(ln(x))$

Primeiro, observe que $\frac{x^2}{|x|} = |x| \to 0$, *quando* $x \to 0$. *Além disso,* $\text{sen}(ln(x))$ *é limitada em* $(0, \infty)$. *Aplicando o Teorema do Anulamento, temos que* $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{|x|}\text{sen}(ln(x)) = 0$.

Exemplo 3.13 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}(x) - x}{x} \right) \text{sen}(1/x)$

Vamos reescrever o primeiro termo: $\left(\frac{\text{sen}(x) - x}{x} \right) = \left(\frac{\text{sen}(x)}{x} - 1 \right)$, *portanto, utilizando o limite trigonométrico fundamental,segue que*

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}(x) - x}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x} - 1 \right) = 0.$$

Como a outra função é limitada, temos , pelo Teorema do Anulamento, que

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{sen}(x) - x}{x} \right) \text{sen}(1/x) = 0$$

Exemplo 3.14 $\lim_{x \to 0} \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

Note que $0 < \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} \leq 1, \forall x \neq 0$ *e* $\frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = x\frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$. *Portanto, segue do Teorema do Anulamento que* $\lim_{x \to 0} \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = 0$.